Problemas de sucesiones crecientes y decrecientes

I'm not robot

reCAPTCHA

Next

Problemas de sucesiones crecientes y decrecientes

Problema 1 En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos. Ver solución Conocemos el término 6-ésimo y la diferencia: Queremos calcular el término general de la sucesión, \(a_n\), que sabemos que es de la forma $$ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$ Como la diferencia es \(d = 5\), tenemos Necesitamos calcular el primer término de la sucesión, \(a_1\). Para ello, aplicamos la fórmula para el caso \(n = 6\) ya que sabemos que \(a_6 = 28\). Sustituimos en la fórmula: Por tanto, el término general de la sucesión aritmética es Los cinco primeros términos son Nota: hemos calculado los términos aplicando la fórmula obtenida, pero una vez sabemos que el primer término es 3 y que la diferencia es 5, podemos obtener fácilmente los términos sumando 5: \(a_ 1 = 3\) \(a_ 2 = 3 + 5 = 8\) \(a_ 3 = 8 + 5 = 13\) \(a_ 4 = 13 + 5 = 18\) \(a_ 5 = 18 + 5 = 23\) Problema 2 En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos. Ver solución Conocemos el primer y el cuarto término: Puesto que la progresión es geométrica, su fórmula general es de la forma De dicha fórmula conocemos el término \(a_1\), pero no conocemos la razón, \(r\). Para calcularla, aplicamos la fórmula para el caso \(n=4\) porque sabemos que \(a_4 = 48\): Por tanto, la razón es \(r = 2\) y el término general es Para calcular la suma de los 5 primeros términos, aplicamos la fórmula. Necesitaremos calcular el término \(a_5\): Problema 3 Encontrar el término general de la sucesión 20, 19.3, 18.6, 17.9, ... ¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30). Ver solución Si la sucesión es aritmética, entonces la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. Buscamos la diferencia: Se trata de una sucesión aritmética con diferencia d = -0.7 (es una sucesión decreciente, d < 0). Por tanto, el término general es Aplicando dicha fórmula podemos calcular los terminos décimo, vigésimo y trigésimo: Problema 4 Encontrar el término general de la sucesión 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,... ¿Es aritmética o geométrica? Calcular los términos n- ésimos para los valores de n = 10, 100. Se sabe que la suma de los infinitos términos de esta sucesión es 1 (ejercicio 26). Razonar cómo es posible que la suma de infinitos términos positivos no sea infinita. Ver solución Buscamos la diferencia: Puesto que los valores no coinciden, la sucesión no es aritmética. Buscamos la razón: Se trata de una sucesión geométrica de razón r = 0.5 (decreciente puesto que r < 1). Como conocemos el primer término y la razón, el término general es Así, podemos calcular los términos 10-ésimo y 100-ésimo: Observamos que los términos de la sucesión son muy pequeños: el décimo tiene tres ceros detrás de la coma y el centésimo, tiene treinta. Aunque los términos de la sucesión son positivos, éstos son cada vez más pequeños y muy próximos a 0. De este modo, al sumarlos, a penas incrementa el valor, aunque sumemos infinitos números. Problema 5 En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general. Ver solución Conocemos el primer término y la suma de los diez primeros términos: Utilizaremos las fórmulas del término general y de la suma (de una progresión aritmética) para poder calcular la diferencia, \(d\). Dichas fórmulas son: Hemos escrito en las fórmulas \(a_1 = 1\). Sustituimos los datos conocidos: Podemos sustituir \(a_{10}\) en la primera fórmula: De la ecuación resultante obtenemos d: Luego la diferencia es \(d = 53/45\) y el término general es Problema 6 En una progresión aritmética finita, el segundo término es -23 y el último 32. Si se sabe que hay 12 términos, calcular el término general. Ver solución Conocemos el segundo término y el duodécimo: Por ser aritmética, sabemos que la fórmula general de la misma es de la forma Con los datos que conocemos, podemos construir un sistema de ecuaciones para calcular el primer término y la diferencia: Resolvemos el sistema por el método de igualación: Por tanto, el término general es Nota: hemos indicado los valores que puede tomar n ya que la sucesión es finita. Problema 7 La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética cuya diferencia es 11 vale 66. Encontrar dichos términos. Ver solución Los números son Es decir, tenemos una ecuación de primer grado: Luego los números son 11, 22, 33. La ecuación la podemos expresar en términos de una progresión como es decir, como la suma de los tres primeros términos de una progresión cuyo término general es Problema 8 La suma de n números naturales consecutivos a partir de 55 (sin incluirlo) vale 738. Encontrar n. Ver solución El enunciado nos dice que Así, \(n\) es el número de sumandos a la izquierda de la igualdad. Podemos expresar la ecuación anterior como Es decir, En realidad, el interior del paréntesis es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética con diferencia 1 y cuyo primer término es 1, esto es Por tanto, podemos reescribir la ecuación como Tenemos entonces una ecuación segundo grado cuyas soluciones son n = -123, 12. Como n representa la cantidad de sumandos, ha de ser un número natural (entero positivo), de modo que n = 12. Problema 9 La suma de 6 números impares consecutivos vale 120. Encontrar dichos números. Ver solución Un número impar es de la forma Por tanto, buscamos el k que cumple Simplificando, El interior del paréntesis es la suma de los 6 primeros términos de una sucesión aritmética de diferencia 2 y que empieza en 1, es decir, Por tanto, Los números son 15, 17, 19, 21, 23, 25. Problema 10 Demostrar que en cualquier sucesión geométrica positiva, cada término es la raíz cuadrada del producto de su término anterior por su término siguiente. Es decir, $$ a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$ Ver solución El término general de una sucesión geométrica es y queremos demostrar que Para demostrarlo, calculamos \(a_{n-1}\) y \(a_{n+1}\) usando el término general: $$a_{n-1} = a_1 r^{n-1-1} = a_1 r^{n-2} $$ $$a_{n+1} = a_1 r^{n+1-1} = a_1 r^{n} $$ y sustituimos en el radicando. Quedará demostrado al obtener que dicha raíz es justamente el término \(a_n\): Observaciones: Hemos aplicando las propiedades de las potencias para simplificar. La exigencia de que la sucesión sea positiva es porque, de este modo, la raíz cuadrada de \(a_1^2\) es \(a_1\) y no su valor absoluto. Puesto que la sucesión es positiva, su razón también lo es. Por ello, tampoco escribimos el valor absoluto al simplificar la raíz de \(r^{2(n-1)}\). Problema 11 Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 2. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 512. Ver solución El término general de la progresión es No sabemos la posición que ocupan los tres términos, pero sí sabemos que son consecutivos. Por tanto, si el primero de ellos es \(a_n\), los otros dos son \(a_{n+1}\) y \(a_{n+2}\). Entonces, utilizando el término general, el producto de dichos términos es Por tanto, los términos son el tercero, el cuarto y el quinto: 4, 8, 16. Problema 12 Encontrar el término general de la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ¿Es aritmética o geométrica? Ver solución Comprobamos si es aritmética restando términos consecutivos: No lo es puesto que las diferencias no coinciden. Comprobamos si es geométrica dividiendo términos consecutivos: No lo es puesto que la razón no es la misma. Luego la progresión no es ni aritmética ni geométrica. Tendremos que deducir por nuestra cuenta cuál es el término general. Lo primero que hacemos es fijarnos en la relación entre la posición de cada término y su valor: Por tanto, deducimos que el término general es No es una progresión aritmética ni geométrica. En esta sucesión no podemos utilizar la fórmula que conocemos para sumar \(n\) términos. Problema 13 Encontrar el término general de la sucesión 1, 4, 27, 256, 3125, ... ¿Es aritmética o geométrica? Ver solución Comprobamos si es aritmética: No lo es. Comprobamos si es geométrica: No lo es. Nos fijamos en la relación entre la posición de cada término y su valor: Por tanto, deducimos que el término general es No es una progresión aritmética ni geométrica. Problema 14 Encontrar el término general de la sucesión 1, -2, 4, -8, 16,... ¿Es aritmética o geométrica? Ver solución Comprobamos si es aritmética: No lo es. Comprobamos si es geométrica: Por tanto, es geométrica con razón r = -2 y, por tanto, su término general es Como la razón es negativa, la sucesión es alternada. Esto implica que cada término tiene un signo distinto. En esta sucesión en particular, los términos de posición par son negativos y los otros son positivos. Problema 15 Calcular la suma de los tres primeros términos de una sucesión geométrica de razón 0.5 sabiendo que su producto es 1000. Ver solución Como la sucesión es geométrica y conocemos la razón, el término general es $$ a_n = a_1\cdot 0.5^{n-1} $$ Sabemos que el producto de los tres primeros términos es 1000. Dicho matemáticamente, $$ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1000 $$ Sustituimos \(a_1\), \(a_2\) y \(a_3\) de la expresión anterior por el término general con \(n=1\), \(n=2\) y \(n=3\), respectivamente: $$ 1000 = a_1\cdot (a_1 \cdot 0.5)\cdot (a_1\cdot 0.5^2) $$ Con lo que obtenemos la ecuación $$ 1000 = a_1 ^3 \cdot 0.5^3$$ Esta ecuación nos proporciona el primer término: Por tanto, la sucesión es 20, 10, 5,... y la suma de los tres primeros términos es 35. Problema 16 Considérese la sucesión dada por recurrencia Calcular los términos que sean necesarios para poder deducir su término general. Ver solución Aplicaremos la fórmula dada para calcular, uno a uno, los primeros términos de la sucesión: Luego la sucesión es $$1, 3, 5, 7, 9, 11,...$$ que es la sucesión de los números impares. Por tanto, su término general es Se trata de una sucesión aritmética de diferencia d = 2. Nota: al expresar la sucesión por recurrencia, para calcular el término \(n+1\)-ésimo se necesita calcular previamente todos términos que le preceden: para calcular \(a_{n+1}\) hacen falta \(a_{n}\) y \(a_{n-1}\), pero para calcular \(a_{n}\) hacen halta \(a_{n-1}\) y \(a_{n-2}\) y, asi, sucesivamente hasta \(a_1\). No ocurre lo mismo con el término general. Problema 17 El sueldo de un trabajador es de 950€ mensuales y cada año se incrementa en 50€ (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 10 años siguientes. Ver solución Construimos una sucesión cuyo término n-ésimo es el sueldo mensual en el año n-ésimo: En el primer año, el sueldo mensual es de 950. En el segundo año, el sueldo mensual es de 1000. En el tercero, 1050. Luego la sucesión es Se trata de una progresión aritmética con diferencia d = 50. En total, en el año n-ésimo el sueldo es 12·an porque hay 12 meses en un año y cada término representa el sueldo mensual. Por tanto, debemos multiplicar por 12 la suma de los 10 primeros términos: En 10 años, la cifra asciende a 12·11750 = 141000€. Problema 18 Calcular la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200. Ver solución Construimos la progresión formada por dichos números: Hemos usado k porque no sabemos qué posición ocupa el último término. Es una progresión aritmética con diferencia d = 2 y con término general Buscamos la posición del último término: Resolvemos la ecuación y obtenemos k = 50. Por tanto, la suma será Problema 19 Demostrar que la suma de los n primeros impares es n2. Ver solución Consideremos la sucesión de los números impares Es una sucesión aritmética con diferencia d = 2. Queremos calcular la suma de los n primeros términos, es decir, Problema 20 En una progresión aritmética, la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Hallar el término general y calcular la suma de los cinco primeros términos. Ver solución Como la progresión es aritmética, el término general es Tenemos los datos: Resolvemos el sistema de ecuaciones obteniendo el primer término y la diferencia: Luego el término general es Y la suma de los cinco primeros es Problema 21 Calcular el valor del parámetro a para que los números a+2, 3a+2, 9a-2 sean los tres primeros términos de una progresión geométrica. Ver solución Para que formen una progresión geométrica de razón r se tiene que cumplir Como la razón debe ser constante, igualamos ambas expresiones y así obtenemos a: La sucesión es 4, 8, 16,... y tiene razón r = 2. Problema 22 En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente con los cuadrados obtenidos: Calcular la sucesión cuyo término n-ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado n-ésimo. ¿Qué tipo de sucesión es? Ver solución Utilizaremos el teorema de Pitágoras (h 2 = a 2 + b 2) para calcular los lados. El lado del cuadrado inicial mide 2.El lado del primer cuadrado mide El lado del segundo cuadrado mide El lado del tercer cuadrado mide El lado del cuarto cuadrado mide Tenemos la sucesión Es una sucesión geométrica puesto que la razón entre términos consecutivos se mantiene constante: Por tanto, el término general es Problema 23 Calcular un número sabiendo que sus cinco cifras están colocadas en progresión aritmética, que la suma de todas ellas es 20 y que la primera es el doble de la tercera. Ver solución Representamos el numero como El término general de la sucesión que proporciona las cifras es: De la suma de todas las cifras y de la relación existente entre la primera y la tercera obtenemos las siguientes ecuaciones: Tenemos el sistema de ecuaciones cuya solución es La sucesión es8,6,4,2,0,... Y, por tanto, el número buscado es x = 86420. Problema 24 Calcular la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre los números 500 y 7800 inclusive. Ver solución Consideremos la sucesión aritmética formada por los múltiplos de 13: Buscamos el primer término que sea mayor o igual que 500, es decir, Por tanto, el primer múltiplo de 13 y mayor o igual que 500 es Ahora buscamos el último múltiplo de 13, que debe cumplir Es decir, es el término Calculamos la suma donde hemos usado la fórmula de la suma de las progresiones aritméticas y 562 es el número de términos que hemos sumado. Problema 25 Los dos primeros términos de una progresión aritmética son (a - b)2 y (a + b)2. Calcular la diferencia y la suma de los 5 primeros términos. Ver solución Puesto que forman parte de una progresión aritmética, si la diferencia es d, sabemos que el segundo término es Desarrollamos los cuadrados y calculamos la diferencia d: El término general es La suma de los 5 primeros términos es Problema 26 Demostrar que la suma infinita de la sucesión es 1 con la ayuda del siguiente diagrama que representa un cuadrado de lado 1. Ver solución Calculamos los primeros términos de la sucesión: Puesto que el lado del cuadrado es 1, su área es 1. Así pues, el área de la mitad del cuadrado es 1/2. El área de la mitad de esta mitad es 1/4. Y así, sucesivamente: Es decir, las áreas de los cuadrados o rectángulos que se obtienen al dividir por la mitad son los términos de la sucesión. Para infinito, habremos recubierto el cuadrado completo, que tiene área 1. Por tanto, la suma de todos los términos de la sucesión es 1. Así que Problema 27 Demostrar que la suma infinita de la progresión geométrica es 1 con la ayuda del siguiente diagrama de cuadrados de lado 1 en los que el área amarilla del n-ésimo cuadrado vale lo mismo que el término n-ésimo de la progresión. Ver solución El área total del cuadrado es 1. Por tanto, el área amarilla del primer cuadrado es ya que el lado de los cuatro cuadrados es 1/2. En el segundo cuadrado, el lado de los cuatro cuadrados pequeños es la mitad del lado de los cuatro cuadrados grandes, es decir, 1/4. Por tanto, el área amarilla es En el tercer cuadrado, el lado de los cuatro cuadrados pequeños es la mitad del lado de los cuatro cuadrados intermedios, es decir, 1/8. Por tanto, el área amarilla es De este modo, si sumamos todos los términos de la sucesión tendremos el área total del cuadrado, que es 1. Así que Problema 28 Según una leyenda, un rico brahmán ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el brahmán quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Así pues, le pidió que le pagara con un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc. hasta llegar a los 64 casilleros. Calcular a cuántos granos de trigo ascendía la recompensa. Ver solución El número de granos en cada casillero corresponde con los términos de la progresión geométrica Queremos calcular la suma de los 64 primeros términos. Como la razón es r = 2 y el último término es \(a_{64}\), Problema 29 A las 9 de la mañana, una persona cuenta a tres amigos un secreto. Media hora después, cada uno de estos tres amigos cuenta el secreto a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos cuenta el secreto a otras tres personas y así sucesivamente. Calcular cuántas personas saben el secreto a las 9 de la noche suponiendo que cada persona sólo cuenta el secreto a otras tres personas y a nadie más durante el día y que ninguno ha recibido la información varias veces. Ver solución Construimos una sucesión en la que cada término será el número de personas nuevas que conocen el secreto: Es una sucesión geométrica de razón r = 3. Cada media hora se extiende el secreto y el tiempo total son 12h, es decir, 24 medias horas. Entonces, queremos calcular la suma de los 24 primeros términos: Es decir, lo sabría el mundo entero ya que en el mundo hay más de 7.300 millones de personas (cifra del 2015). Problema 30 Encontrar el valor de n para que se cumpla la igualdad Ver solución Consideremos la progresión geométrica de razón 2 y cuyo primer término es 1. Su término general es buscamos n tal que Como la razón es r = 2, Finalmente, resolvemos la ecuación exponencial